Interlude II: Résoudre des équations linéaire avec anticipations I

- Les modèles à optimisation intertemporelle sont caractérisés par des équations dynamiques qui dépendent des valeurs anticipées futures.
- Exemple simple:

$$x_t = aEx_{t+1} + c\varepsilon_t$$

- On peut alors résoudre ces équations en utilisant le théorème des anticipations imbriquées:

$$E_t\left(E_{t+1}\left(x_{t+1}\right)\right) = E_t\left(x_{t+1}\right)$$

Interlude II: Résoudre des équations linéaire avec anticipations II

- On peut alors réécrire l'équation dynamique:

$$\begin{aligned} x_t &= aEx_{t+1} + c\varepsilon_t \\ &= aE\left(aE_{t+1}x_{t+2} + c\varepsilon_{t+1}\right) + c\varepsilon_t \\ &= a^2Ex_{t+2} + ac\varepsilon_{t+1} + c\varepsilon_t \\ \ldots &= a^TEx_{t+T+1} + c\sum_{i=0}^{T} a^i\varepsilon_{t+i} \end{aligned}$$

- A condition que a<1, le premier terme tend vers zéro quand T tend vers l'infini, tandis que le deuxième terme (la somme) converge vers un nombre fini.

Interlude II: Résoudre des équations linéaire avec anticipations III

- Afin de pouvoir résoudre le problème, il faut spécifier la dynamique du terme d'erreur.
- En supposant un processus AR(1), on peut l'écrire:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + e_t, \qquad E(e_t) = 0, |\rho| < 1$$

- On peut alors calculer une solution explicite pour x_t:

$$\begin{aligned} x_t &= c \sum_{i=0}^{\infty} a^i E(\varepsilon_{t+i}) \\ &= c \sum_{i=0}^{\infty} (a\rho)^i \varepsilon_t \\ &= \frac{c}{1 - a\rho} \varepsilon_t \end{aligned}$$

- (Exemple tiré de Blanchard+Fisher, 1989, ch. 5)

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles I

- Dans le modèle Nouveau Keynésien, l'output gap et le changement d'inflation sont corrélés de manière négative
  - La stabilisation de l'inflation stabilise alors l'output gap
  - En réalité, la banque centrale fait face à un arbitrage entre la stabilisation de l'inflation et la stabilisation de l'output gap
  - Rigidités réelles nécessaires pour expliquer cet arbitrage
- Blanchard et Gali (2005) présentent alors un modèle avec des frictions réelles sur le marché du travail (rigidité réel des salaires)

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles II

- Ce modèle capture l‘idée qu‘un choc d‘offre peut faire diverger la production potentielle et la production efficiente:
  - En absence de rigidités réelles, la production potentielle s‘ajuste immédiatement à la production efficiente. Les conditions marginales de premier ordre sont systématiquement satisfaites
  - En présence de rigidités réelles, ces conditions marginales ne sont pas toujours satisfaites: la production potentielles peut alors différer de la production efficiente (c.-à-d. elle sera inférieure).
  - Ceci aura des conséquences pour la politique monétaire optimale.

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles III

- L'efficacité cyclique n'est alors plus garanti:
  - Conditions d'optimalité intertemporelle:
    - Productivité marginale du travail = Salaire réel
    - Élasticité de substitutions entre capital et travail = salaire réel relatif au taux d'intérêt réel
    - Élasticité de substitutions entre consommation et temps libre = salaire réel
  - Si l'économie si trouve en dehors de l'offre naturelle, ces conditions ne sont pas satisfaite → inefficacité cyclique

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles IV

- Les entreprises produisent à partir d'un input intermédiaire et du travail:

$$Y_t = M_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

- Les coûts marginaux de travail s'écrivent alors (en logarithme):

$$\begin{aligned} mc_t &= w_t - mpn_t \\ &= w_t - (y_t - n_t) - \log(1-\alpha) \end{aligned}$$

- Les ménages maximisent en choisissant consommation et offre de travail optimal:

$$U(C_t, N_t) = \log(C_t) - \exp(\xi) \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

- Le taux marginal de substitution s'écrit alors:

$$mrs_t = \log\left(-\frac{\partial U / \partial N_t}{\partial U / \partial C_t}\right) = c_t + \varphi n_t + \xi$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles V

- L'équilibre optimal (sans rigidités réelles)
  - Demande optimale de travail:

$$\begin{aligned} w_t &= mpn_t \\ &= (y_t - n_t) + \log(1-\alpha) \end{aligned}$$

  - Consommation-offre de travail optimal (en imposant la condition d'équilibre de marché $y_t = c_t$):

$$\begin{aligned} w_t &= mrs_t \\ &= y_t + \varphi n_t + \xi \end{aligned}$$

  - Il s'ensuit pour l'emploi à l'équilibre d'optimum social:

$$(1+\varphi)n^{**} = \log(1-\alpha) - \xi$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles VI

- Contrairement à l'équilibre socialement optimal, la production potentielle doit prendre en compte l'impact de la concurrence monopolistique sur le marché des biens.
- Suivant le modèle Nouveau Keynésien, les firmes déterminent leur marge ainsi:

$$mc_t + \mu^P = 0 \quad avec \quad \mu^P = \log\left(\frac{\theta}{\theta - 1}\right)$$

- Leur demande de travail se détermine alors comme:

$$w_t = y_t - n_t + \log(1-\alpha) - \mu^P$$

- Utilisant l'offre de travail optimal, on obtient l'emploi compétitive (ou naturelle):

$$(1+\varphi)n^* = \log(1-\alpha) - \mu^P - \xi$$

- Ainsi que la production naturelle:

$$y^* = \alpha m + (1-\alpha)n^*$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles VII

- Notons alors que la différence entre le niveau de production socialement optimal et celui de l'équilibre compétitif est constant, indépendamment des choques:

$$y^{**} - y^{*} = \frac{\mu^{P}(1-\alpha)}{1+\varphi} \equiv \delta$$

- Ceci implique que stabiliser l'output gap (la différence entre la production actuelle et le niveau optimal compétitif) ou stabiliser l'output gap optimal (la différence entre la production actuelle et le niveau socialement optimal) conduit à la même politique monétaire.

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles VIII

- Équilibre avec coûts d'ajustement des prix (fixation des prix à la Calvo).
- Comme démontré auparavant, avec de tels coûts d'ajustement on obtient la courbe de Phillips suivante:

$$\pi_t = \beta E\pi_{t+1} + \lambda\left(mc_t + \mu^p\right)$$

- Avec:

$$\lambda = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}$$

- et ω : fraction of firms not adjusting their price

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles IX

- En utilisant la définition des coûts marginaux à l'équilibre compétitif:

$$mc_t + \mu^P = \left(\frac{1+\varphi}{1-\alpha}\right)\left(y - y^*\right)$$

- On peut réécrire cette courbe de Phillips comme suit:

$$\pi_t = \beta E \pi_{t+1} + \kappa\left(y - y^*\right)$$

- avec:

$$\kappa = \lambda \frac{1+\varphi}{1-\alpha}$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles X

- On introduit alors des rigidités réelles sur le marché du travail en supposant que le salaire réel ne peut s'ajuster de manière optimale d'une période à l'autre:

$$w_t = \gamma w_{t-1} + (1-\gamma) mrs_t$$

avec w_t: salaire réel;

MRS: taux marginal de substitution entre consommation et temps libre

γ: degré de rigidité réelle

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XI

- L‘équilibre à prix flexible (1):
  - On peut replacer le taux de substitution marginal par sa condition d‘équilibre:

$$
\begin{aligned}
w_t &= \gamma w_{t-1} + (1-\gamma)(y_t + \varphi n_t + \xi) \\
&= \gamma w_{t-1} + (1-\gamma)(\alpha(m_t - n_t) + (1+\varphi)n_t + \xi)
\end{aligned}
$$

  - Du côté des firmes le salaire d‘équilibre se détermine comme préalablement:

$$
\begin{aligned}
w_t &= mpn_t - \mu^P = (y_t - n_t) + \log(1-\alpha) - \mu^P \\
&= \alpha(m_t - n_t) + \log(1-\alpha) - \mu^P
\end{aligned}
$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XII

- L'équilibre à prix flexible (2):
  - Remplacer pour le salaire réel dans les deux équations et noter que log(1-α)=$(1+\varphi)n_t^{**}+\xi_t$:

$$\begin{aligned}\alpha(m_t - n_t^*) + (1+\varphi)n_t^{**} + \xi_t - \mu &= \gamma\left[\alpha(m_{t-1} - n_{t-1}^*) + (1+\varphi)n_{t-1}^{**} + \xi_{t-1} - \mu\right] \\ &\quad + (1-\gamma)\left[\alpha(m_t - n_t^*) + (1+\varphi)n_t^* + \xi_t\right] \\ \Leftrightarrow \gamma\alpha(\Delta m_t - \Delta n_t^*) + (1+\varphi)n_t^{**} + \gamma\xi_t - (1-\gamma)\mu &= \gamma\left[(1+\varphi)n_{t-1}^{**} + \xi_{t-1}\right] + (1-\gamma)(1+\varphi)n_t^*\end{aligned}$$

  - Notons que log(1-α)=$(1+\varphi)n_t^{**}+\xi_t=(1+\varphi)n_{t-1}^{**}+\xi_{t-1} \leftrightarrow (1+\varphi)\Delta n_t^{**} = \Delta\xi_t$

$$\gamma\alpha(\Delta m_t - \Delta n_t^*) + (1+\varphi)n_t^{**} + \gamma\xi_t - (1-\gamma)\mu = \gamma\left[(1+\varphi)n_t^{**} + \Delta\xi_t + \xi_{t-1}\right] + (1-\gamma)(1+\varphi)n_t^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma\alpha(\Delta m_t - \Delta n_t^*) + (1-\gamma)(1+\varphi)n_t^{**} + \gamma\xi_t - (1-\gamma)\mu = \gamma\xi_t + (1-\gamma)(1+\varphi)n_t^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma\alpha(\Delta m_t - \Delta n_t^{**}) + \gamma\alpha(\Delta n_t^{**} - \Delta n_t^*) + (1-\gamma)(1+\varphi)\left(\frac{y_t^{**} - y_t^*}{1-\alpha}\right) = (1-\gamma)\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma\alpha\left(\Delta m_t - \frac{\Delta\xi_t}{1+\varphi}\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\Delta y_t^{**} - \Delta y_t^*}{1-\alpha}\right) + (1-\gamma)(1+\varphi)\left(\frac{y_t^{**} - y_t^*}{1-\alpha}\right) = (1-\gamma)\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\gamma\alpha + (1-\gamma)(1+\varphi)\right](y_t^* - y_t^{**}) + (1-\gamma)(1-\alpha)\mu = \gamma\alpha(y_{t-1}^* - y_{t-1}^{**}) + \gamma\alpha(1-\alpha)\left(\Delta m_t - \frac{\Delta\xi_t}{1+\varphi}\right)$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XIII

- L'équilibre à prix flexible (3):
  – On obtient alors une différence entre production socialement optimale et une production compétitive qui varie au cours du cycle:

$$y_t^* - y_t^{**} + \delta = \Theta_\gamma \left[y_{t-1}^* - y_{t-1}^{**} + \delta \right] + \Theta_\gamma (1-\alpha) \left[\Delta m_t - \frac{\Delta \xi}{1+\varphi} \right]$$

$$avec \quad \Theta_\gamma = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\alpha + (1-\gamma)(1+\varphi)}$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XIV

- L'équilibre à prix fixe (1):
  - L'équation des rigidités réelles du salaire permet d'obtenir la loi de transition du prix optimal des firmes:

$$mc_t + \mu^P = \gamma\left(mc_{t-1} + \mu^P\right) + x^*$$

avec:

$$x^* = \frac{(1-\gamma)(1+\varphi)\left(y_t - y_t^*\right) + \gamma\alpha\left(\Delta y_t - \Delta y_t^*\right)}{1-\alpha}$$

  - En utilisant la courbe de Phillips résultant des ajustements de prix retarde, on obtient:

$$\pi_t = \beta E\pi_{t+1} + \frac{\lambda}{1-\gamma L} x_t^*$$

avec L: opérateur de retardement (i.e. Lx(t)=x(t-1))

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XV

- L'équilibre à prix fixe (2):
  - Cette équation peut être réécrite pour faire ressortir les deux chocs du modèle:

$$\pi_t = \beta E \pi_{t+1} + \frac{\lambda}{1-\gamma L} x_t^{**} - \frac{\lambda \gamma \alpha}{1-\gamma L}\left[\Delta m_t - \frac{\Delta \xi}{1+\varphi}\right]$$

avec:

$$x_t^{**} = \frac{(1-\gamma)(1+\varphi)\left(y_t - y_t^{**} + \delta\right) + \gamma\alpha\left(\Delta y_t - \Delta y_t^{**}\right)}{1-\alpha}$$

ou encore:

$$\pi_t = \beta E \pi_{t+1} - \frac{\lambda \gamma \alpha}{1-\gamma L} \varepsilon_m$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XVI

- Pour résoudre le modèle, on se concentre sur un choc sur les prix intermédiaire que l'on suppose se transmettre au taux des rigidités réelles:

$$\varepsilon_m(t) = \gamma\varepsilon_m(t-1) + v_t, \quad Ev_t = 0$$

- En utilisant les méthodes de résolution des équations à anticipations rationnelles, on obtient:

$$\pi_t = \gamma\pi_{t-1} - \frac{\lambda\gamma\alpha}{1-\beta\gamma}\varepsilon_m$$

- Résultat: Plus les rigidités réelles sont importantes, plus la transmission du choc sera longue et retardée.

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XVII

- Le coût d'une désinflation (1)
  - Sans rigidités réelles

$$\pi_t = \beta E\pi_{t+1} + \kappa\left(y_t - y_t^*\right) \& \; E\pi_{t+1} = \pi_t \Rightarrow dy_{t+k} = -\frac{1-\beta}{\kappa}\tilde{\pi}$$

$$dw_{t+k} = -\left(\frac{1-\beta}{\kappa}\right)\left(1+\frac{\varphi}{1-\alpha}\right)\tilde{\pi}$$

  - Avec rigidités réelles
    - On rappelle l'évolution des coûts marginaux:

$$mc_t + \mu^P = \gamma\left(mc_{t-1} + \mu^P\right) + x^*$$

avec

$$x^* = \frac{(1-\gamma)(1+\varphi)\left(y_t - y_t^*\right) + \gamma\alpha\left(\Delta y_t - \Delta y_t^*\right)}{1-\alpha}$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XVIII

- Le coût d'une désinflation (2):
  - La désinflation a pour objectif d'atteindre la stabilité des prix:

$$mc_t + \mu^P = 0$$

  - En partant d'un niveau initial de production $y_{t-1} = \frac{1-\beta}{\kappa}\tilde{\pi}$ on obtient alors:

$$mc_t + \mu^P = \gamma\left(mc_{t-1} + \mu^P\right) + \frac{(1-\gamma)(1+\varphi)\left(y_t - y_t^*\right) + \gamma\alpha\left(\Delta y_t - \Delta y_t^*\right)}{1-\alpha}$$

$$0 = \gamma\left(mc_{t-1} + \mu^P\right) + \frac{(1-\gamma)(1+\varphi)y_t + \gamma\alpha\Delta y_t}{1-\alpha}$$

$$0 = \gamma\frac{1-\beta}{\lambda}\tilde{\pi} + \frac{[(1-\gamma)(1+\varphi)+\gamma\alpha]}{1-\alpha}y_t - \frac{\gamma\alpha}{1-\alpha}y_{t-1} = \gamma(1-\beta)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\gamma\alpha}{\kappa(1-\alpha)}\right)\tilde{\pi} + \frac{[(1-\gamma)(1+\varphi)+\gamma\alpha]}{1-\alpha}y_t$$

$$\Rightarrow y_t = -\frac{\gamma(1-\beta)(1-\alpha+\varphi)}{\kappa[(1-\gamma)(1+\varphi)+\gamma\alpha]}\tilde{\pi}$$

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidités réelles XIX

- Le coût d'une désinflation (3):
  - On obtient alors le coût de la désinflation avec rigidités réelles qui s'élève à:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = -\frac{1-\beta}{\kappa}\left[1+\frac{\gamma(1-\alpha+\varphi)}{(1-\gamma)(1+\varphi)+\gamma\alpha}\right]\tilde{\pi}$$

et augmente avec l'importance de la rigidité réelle.

Le modèle Nouveau Keynésien: Rigidité réelle et persistance de l'inflation

- En absence de rigidité réelle, la stabilisation de l'output gap implique la stabilisation du taux d'inflation à son niveau d'état stationnaire (i.e. zéro).

$$\pi_t = \beta E \pi_{t+1} + \kappa\left(y - y^*\right) : y - y^* = 0 \Rightarrow \pi_t = E\pi_{t+1} = 0$$

- En présence de rigidité réelle, un output gap même transitoire aura un impact persistent sur l'inflation, la raison étant que le salaire réel ne sera affecté que graduellement par l'émergence du gap.

$$\pi_t = \beta E \pi_{t+1} + \frac{\lambda}{1-\gamma L} x_t^* \Leftrightarrow \pi_t = \frac{\gamma}{1+\beta\gamma}\pi_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta\gamma} E\pi_{t+1} + \frac{\lambda}{1+\beta\gamma} x_t^* + \zeta$$

avec le bruit blanc:

$$\zeta = \frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}\left(\pi_t - E_{t-1}\left(\pi_t\right)\right)$$